

## 外管壁绝热时管内层流传热传质的分析解

张玉文 陈钟頔

(西安交通大学)

## 摘要

用分离变量法求解了圆管外表面绝热的管内层流传热传质耦合问题。导出了流场中温度及浓度分布,对混合平均温度及浓度,进口段长度、壁面热流及传质量进行了分析。

## 一、引言

对传热传质耦合问题 [1]给出了平行平板外表面绝热的分析解, [2]给出了相应的恒热流条件下数值解。对外表面绝热的圆管内传热传质耦合问题的求解迄今尚未见文献报导。

在外壁绝热的圆管内表面上,附上一层易升华的物质,气体流过时该物质就会升华吸热,但外壁是绝热的,因而内壁必须向管内气体吸热,导致气体温度分布的改变,形成一个传热传质耦合问题。这种现象在用蔡升华方法比拟管内强制对流换热时就会发生。

## 二、数学描写

假定流动是不可压缩层流流动,常物性,入口处流动已充分发展,速度分布为抛物线形,进口温度为  $T_0$ , 升华引起的壁面喷射速度忽略不计[1], 则问题的数学描写为

$$u = 2U_m \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \quad (1) \quad ur \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (2) \quad ur \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r}\right) \quad (3)$$

$$x = 0, T = T_0, C = C_0 \quad (4) \quad r = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

$$\text{又} \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \rho D \lambda_s \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (6)$$

管壁处的另一个边界条件采用升华物质的浓度与温度的线性关系,其合理性见[1],  $r = R, C = AT + B$  (7) 定义下列无量纲量

$$\eta = r/R \quad \xi = (x/R)/Pe \quad Le = a/D \quad Re = 2U_m R/\nu \quad Pe = 2U_m R/a$$

$$\theta = (T - T_f)/(T_0 - T_f) \quad \varphi = (C - C_f)/(C_0 - C_f) \quad (8)$$

其中  $T_f, C_f$  为充分发展后的温度及浓度。

利用这些无量纲量可将基本方程及边界条件化为

$$\eta(1-\eta^2) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \quad (9) \quad Le_w \eta(1-\eta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \quad (10)$$

$$\xi = 0, \quad \theta = 1, \quad \varphi = 1 \quad (11) \quad \eta = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

$$\eta = 1, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = Le_w \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (13) \quad \varphi = -(A\lambda_s / c_p)\theta \quad (14)$$

### 三、分离变量法

式(9)、(10)的解可用下列形式表示

$$\theta(\xi, \eta) = A e^{-\beta^2 \xi} Q(\eta) \quad (15) \quad \varphi(\xi, \eta) = B e^{-\gamma^2 \xi} \Phi(\eta) \quad (16)$$

代入(9)、(10)后可得出Q、Φ的方程如下

$$\frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dQ}{d\eta} \right) + \beta^2 \eta (1 - \eta^2) Q = 0 \quad (17) \quad \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{d\Phi}{d\eta} \right) + \gamma^2 \eta (1 - \eta^2) \Phi = 0 \quad (18)$$

由(13)、(14)可知  $\beta = \gamma$ ,  $B/A = -(A\lambda_s / c_p) Q(1) / \Phi(1)$ ,  $B/A = Le_w [Q'(1) / \Phi'(1)]$

或  $-(A\lambda_s / c_p) \cdot [Q(1) / \Phi(1)] = Le_w [Q'(1) / \Phi'(1)] \quad (20)$

由(12)可知  $Q'(0) = \Phi'(0) = 0 \quad (21)$  定义  $G(\beta) = (A\lambda_s / c_p) [Q(1) / \Phi(1)]$

$$+ Le_w [Q'(1) / \Phi'(1)] \quad (22)$$

只有当  $G(\beta) = 0$  时的  $Q, \Phi$  才满足(20), 由于(17)、(18)的形式十分复杂, 无法用分析法给出  $G(\beta)$ , 进而确定固有值  $\beta$  的取值, 所以, 只能用数值法求解这一固有值问题[3], 即以  $Q'(0) = \Phi'(0) = 0$  为初值条件, 由于问题是齐次的, 可取  $Q(0) = \Phi(0) = 1$ , 然后用 Runge-Kutta 方法求解(17)、(18), 可得待定  $\beta$  值下  $G(\beta)$  的大小, 只有  $G(\beta) = 0$  时的  $\beta$  才是所需的固有值. 用数值方法可求出一系列固有值  $\beta_n$  及相应的固有函数  $Q_n(\eta)$  和  $\Phi_n(\eta)$ .

将上述  $\beta_n$  及  $Q_n(\eta), \Phi_n(\eta)$  代入(15)、(16)中, 所得的解都可满足边界条件(12) (14), 但却不满足边界条件 (11), 所以, 可以把这一系列解迭加起来:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2 \xi} Q_n(\eta) \quad (23) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\beta_n^2 \xi} \Phi_n(\eta) \quad (24)$$

满足(11)的  $A_n, B_n$  可由下列二式确定

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_n(\eta) \quad 1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Phi_n(\eta) \quad (25)$$

利用与[1]中类似的方法可导出正交性关系如下:

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^1 \eta (1 - \eta^2) [A_m A_n Q_m Q_n + (c_p / A\lambda_s) B_m B_n \Phi_m \Phi_n] d\eta = 0 \quad (26)$$

由(25)、(26)可导出系数  $A_n, B_n$  的公式. 这样,  $\theta$  和  $\varphi$  就可按(23)、(24)算出. 由此经推导混合平均温度及混合平均浓度的无因次形式表达式及 Nusselt 数为

$$\theta_m = \varphi_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A_n}{\beta_n^2 e^{\beta_n^2}} Q'_n(1) \quad (27)$$

$$Nu = \frac{q}{T_b - T_w} \cdot \frac{2R}{k} = - \frac{2}{\theta_b - \theta_w} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2 \xi} Q'_n(1) \quad (28)$$

只需将  $\theta, Q'_n, A_n$  换成  $\varphi, \Phi'_n B_n$  即成 Sherwood 数的表达式。

#### 四、计算结果及其分析

1、混合平均温度及浓度 由图1可见  $A\lambda_s/c_p$  对  $\theta_m$  和  $\varphi_m$  的影响很小, 当  $Le_w < 1$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大使  $\theta_m$  及  $\varphi_m$  相应增大, 而当  $Le_w > 1$  时则相反.  $Le_w$  对  $\theta_m$  及  $\varphi_m$  的影响很大,  $Le_w$  增大时,  $\theta_m$  及  $\varphi_m$  沿整个  $\xi$  都增大, 使进口段加长。

2. 壁面温度 图2给出了壁温沿管长的变化关系. 可见,  $Le_w$  对  $\theta_w$  的影响很大, 当  $Le_w < 1$  时,  $\theta_w$  在起始段是负的, 而  $Le_w > 1$  时,  $\theta_w$  沿整个  $\xi$  都是正值, 总的来说, 壁温  $\theta_w$  随  $Le_w$  的增大而增加.  $Le_w$  越大,  $A\lambda_s/c_p$  对  $\theta_w$  的影响就越强, 当  $Le_w > 1$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大使  $\theta_w$  减小, 而  $Le_w < 1$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大使  $\theta_w$  相应增加。

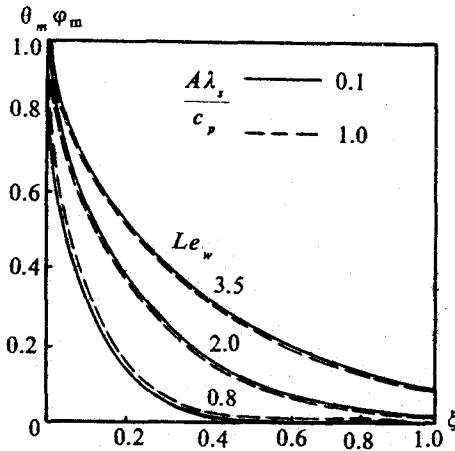


图1.混合平均温度及浓度

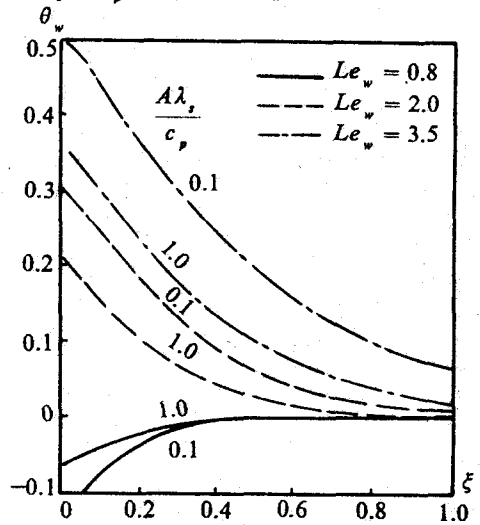


图2.壁面温度分布

3、壁面传热与传质 由图3图4可见, 随着  $Le_w$  的增大, 充分发展后 *Nusselt* 数相应增大, 而充分发展后的 *Sherwood* 数则减小, 当  $Le_w$  增大时, 进口段加长.  $A\lambda_s/c_p$  对 *Nu* 及 *Sh* 的影响较小,  $Le_w < 1$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大将使 *Nu* 及 *Sh* 都增大;  $Le_w > 1$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大使 *Nu* 和 *Sh* 都相应减小. 由图4还可以发现, 当  $A\lambda_s/c_p = 0.1$  时,  $Le_w$  的影响很小, 而  $A\lambda_s/c_p = 1.0$  时,  $Le_w$  对 *Sh* 的影响变得很大. 由 [1][2] 可知,  $A\lambda_s/c_p$  的大小代表着温度的高低, 所以, 在应用中, 应按实际要求选定系统的温度。

4. 温度及浓度分布 由图5可知  $Le_w = 0.8$  时  $A\lambda_s/c_p$  的增大使  $\theta$  增大, 而  $Le_w = 3.5$  时,  $A\lambda_s/c_p$  的增大将使  $\theta$  减小.  $Le_w$  的增大却使  $\theta$  增大, 这一点与  $\theta_m$  的变化是一致的. 从  $\eta = 1$  处温度梯度的变化, 可解释上述 *Nusselt* 数的变化.  $\xi$  越大,  $\theta$  的分布越平缓, 这与图3中 *Nusselt* 数沿  $\xi$  的变化是一致的.  $\varphi$  的变化与  $\theta$  类似, 不再赘述。

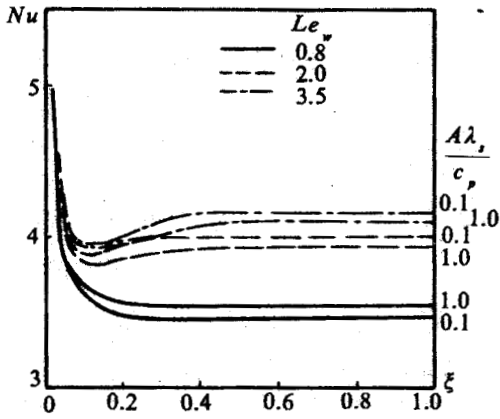


图 3. Nusselt 数分布

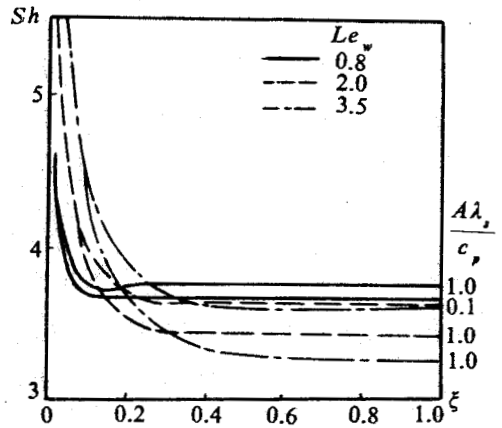


图 4. Sherwood 数分布

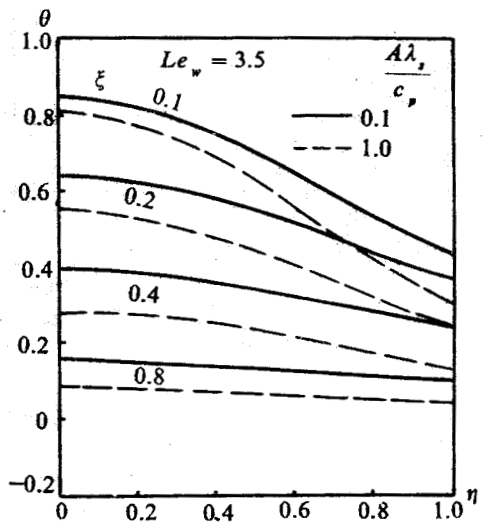
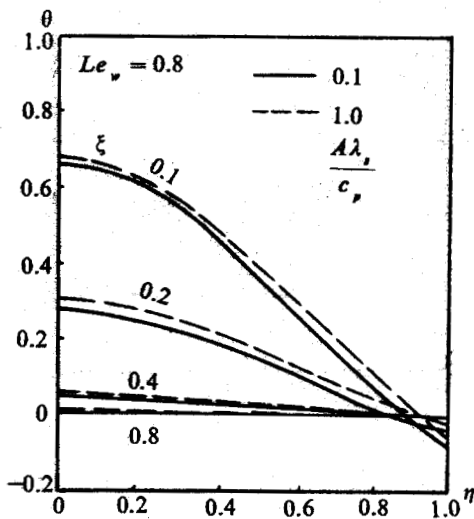


图 5. 温度及浓度分布图

参考文献

[1] Sparrow E.M. & Spalding E.C., Coupled Laminar Heat Transfer and Sublimation Mass Transfer in a Duct, Trans, ASME. Ser.C, 90-1, 115 (1968)

[2] 黑崎晏夫, 热および物质伝達の共存する平行平板間の尾流流れ, 日本機械学会論文集中, 39-324, 2512 (1973)